1.1 Basic Definitions and Constructions

Sections.

Lem. 1.1.

ベクトル束の射
$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$
が iso $\Leftrightarrow$ $\forall b \in B$, $p_1^{-1}(b) \longrightarrow p_2^{-1}(b)$ は線形同型.

prf.

($\Rightarrow$) : 明らか

($\Leftarrow$) : 全単射はOK. h^{-1}の連続性 :

局所的な問題なので h は p_1, p_2 の自明化内で考えてよく.

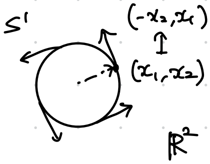
ファイバーごとの変換行列を $g_b : p_1^{-1}(b) \to p_2^{-1}(b)$ とおく.

これが連続なので行列の成分はbについて連続に変化するが

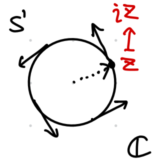
逆行列 g_b^{-1} の各成分は g_b の成分の有理式で書けるので g_b^{-1} : 連続. □

Examples

☆ S^1 の接束は自明.



複素平面では



… $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ と見て、$z \mapsto iz$ が接束の nonvanishing section を与える.

☆ S^3 の接束も自明.

正規直交する

… $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ と見て. $z \mapsto iz$, $z \mapsto jz$, $z \mapsto kz$ が接束の nonvanishing section を与える.

quaternion
四元数

$\mathbb{R} + i\mathbb{R} + j\mathbb{R} + k\mathbb{R}$ で $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij = k,\ jk = i,\ ki = j$

$ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$

なぜうまくいくか？

Euclid sp. のふつうの norm

… $|zw| = |z||w|$ をみたすような積を $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ に定めるような環構造 $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ が存在するため.

☆ S^7 の接束も自明.

… $S^7 \subseteq \mathbb{R}^8 \cong \mathbb{O}$ と見て. 同様の構成ができる.

octonion
八元数

$\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ に積を

$(z_1, z_2)(w_1, w_2)$

$= (z_1 w_2 - \overline{w_2} z_2,\ z_2 \overline{w_1} + w_2 z_1)$ で入れたもの. これも $|zw| = |z||w|$ をみたす.

実は接束が自明になるのはこれら S^1, S^3, S^7 のみ. (§2.3)

Direct sums.

Examples

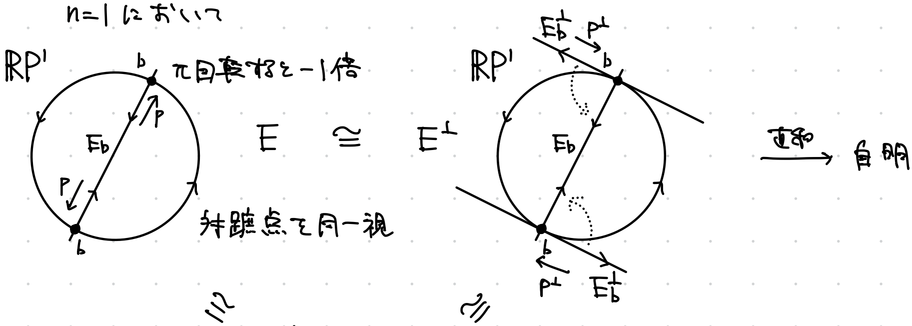
○ 非自明束は、別のベクトル束と直和を取ると自明になりうる。

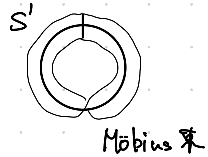
e.g. ○ $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ の $\underbrace{\text{接束}}_{\text{一般には非自明}}$ と $\underbrace{\text{法束}}_{\text{自明}}$ の直和は自明。

(このように自明束と直和すると自明にできるような束は stably trivial であるという。)

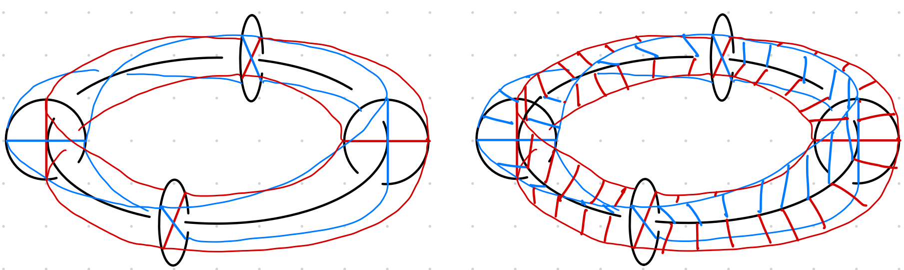
○ $\mathbb{RP}^n$ の標準線束 E とその直交補束 $E^\perp$ の直和は自明。

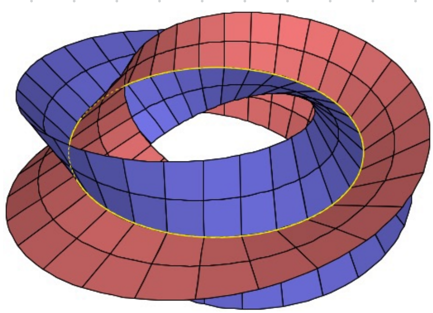
$n=1$ において





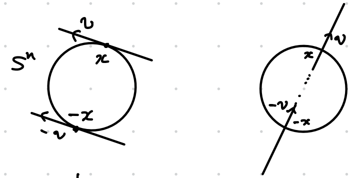
よって Möbius束 ⊕ Möbius束 ＝ 自明束。





Examples (実射影空間の接束)

$$\begin{array}{ccc}
\underset{\text{自明束}}{S^n \times \mathbb{R}^{n+1}} & \cong & \underset{\text{接束}}{TS^n} \oplus \underset{\text{法束}}{NS^n} \\
\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle (x,v)\sim(-x,-v)\text{ で同一視すると}} \\
\underset{\text{標準束 } n+1 \text{ コの直和}}{E_n^{\oplus n+1}} & & \underset{\text{接束}}{T\mathbb{R}P^n} \oplus \underset{\text{自明束}}{(\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R})}
\end{array}$$



↓ 同一視

○ $n=3$ のとき　$T\mathbb{R}P^3$ は自明束. (自明束 TS^3 の商として見ると分かる)

$\rightsquigarrow E_3^4$ は自明.

○ $n=7$ のとき $\overset{\text{同様}}{\rightsquigarrow} E_7^8$ は自明.

⋮

☆ §2.5で、E_n^k が stably trivial になる (n,k) を決定する.

解答：　k が $2^{\varphi(n)}$ の倍数であるとき.

ここで $\varphi(n) := \#\{ i \mid 1 \leq i \leq n,\ i \equiv 0,1,2,4 \mod 8 \}$

○ $n=15$ のとき　E_{15}^{16} は自明でない：$2^{\varphi(15)} = 2^7 = 128$ より.

Inner Products.

B : Haus. & para cpt. を以下では仮定する.

<u>Prp. 1.2.</u> 任意の(実)ベクトル束に内積が存在する.

prf. 自明化に従属する1の分割を取り、内積を貼り合わせる. □

<u>Prp. 1.2'.</u> 任意の複素ベクトル束にHermite内積が存在する.

<u>Prp. 1.3.</u> 任意の実ベクトル束は完全可約.

i.e. $\underset{\text{部分ベクトル束}}{{}^\forall E_0 \subseteq E}$ $\underset{\text{部分ベクトル束}}{{}^\exists E_1 \subseteq E}$, $\underset{\text{ベクトル束として}}{E_0 \oplus E_1 \cong E}$.

prf. Eに内積を入れ, E_0の直交補空間をE_1とする.
Gram-Shmidt 直交化は連続的なので、E_0の自明化でE_1も自明. □

<u>Prp. 1.4.</u> さらに B : cpt を仮定.
任意の実ベクトル束は自明束の直和因子.
i.e. ${}^\forall E$: ベクトル束, ${}^\exists E'$: ベクトル束, $E \oplus E'$は自明束.

Rmk. cptの仮定なしでは不成立. e.g. $\mathbb{R}P^\infty$の標準線束(いつか見る)

prf. Bの有限自明開被覆$\{U_i\}$に従属する$\{\varphi_i\}$を取る (Urysohn's lem.)

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d, "p"'] & \supseteq & p^{-1}(U_i) \arrow[r, "h_i", "\sim"'] \arrow[d] & U_i \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "射影"] \arrow[dd, "\pi_i"] \\
B \arrow[d, "\varphi_i"'] & \supseteq & U_i \arrow[d] & \\
{[0,1]} & \supseteq & (0,1] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$g_i : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$;\ v \longmapsto \varphi_i(p(v))(\pi_i h_i(v))$
は $\varphi^{-1}(U_i)$ の各ファイバー上で inj. なので

ヒフク$\{U_i\}$のコスウだけ$\mathbb{R}^n$をコピーし$\mathbb{R}^N$に
$g : E \longrightarrow \mathbb{R}^N$
は E全体の各ファイバー上で inj.

$\rightsquigarrow E \subseteq B \times \mathbb{R}^N$: 自明束の sub bdle となる. □

Tensor Products.

Construction.

$p_1: E_1 \to B$
$p_2: E_2 \to B$ に対し. $p: E_1 \otimes E_2 \to B$ を以下のように構成する:

- 集合としては, $b \in B$ に対し $p^{-1}(b) = p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)$ の非交和を $E_1 \otimes E_2$ とする.
- 位相は、同時自明化 $h_1: p_1^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^n$, $h_2: p_2^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^m$ に対し.
  全単射 $p^{-1}(U) \longrightarrow U \times (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m)$ が同相となるように入れる.
- 以上は自明化の取り方によらず、ベクトル束を定めている.

Rmk.

ベクトル束の構成は,

① $\begin{cases} p: E \to B \\ \{h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times \mathbb{R}^n\} \end{cases}$ s.t. $p|_{p^{-1}(U_\alpha)} = pr_1 \circ h_\alpha$

$\rightsquigarrow$ すると $\{h_\beta h_\alpha^{-1} =: g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL_n(\mathbb{R})\}$ は $g_{\gamma\beta} g_{\beta\alpha} = g_{\gamma\alpha}$ をみたす

ではなく

② $\{g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL_n(\mathbb{R})\}$ s.t. $\underbrace{g_{\gamma\beta} g_{\beta\alpha} = g_{\gamma\alpha}}_{\text{cocycle condition}}$ をみたす : glueing function

からも等価に構成できる.

② の観点では、ベクトル束のテンソルは glueing function のテンソルと理解できる.

線束(1次元ベクトル束)について考察.

$\mathrm{Vect}^1(B)$:= B上線束の同型類

- これにはテンソル積によってAbel群の構造が入る!
  - 単位元 … 自明線束
  - 逆元 … glueing function $g_{\alpha\beta}$ を $g_{\alpha\beta}^{-1}$ におきかえて定まるベクトル束
    (cocycle condition は、$GL_1(\mathbb{R})$ が可換なので保たれる)

  $E \in \mathrm{Vect}^1(B)$ に内積をひとつ与えると,
  自明化を調整することで, $g_{\alpha\beta} \in \{1, -1\}$ にできる.
  i.e. $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\alpha\beta}$

$\rightsquigarrow$ { ◦ Eの逆元はE自身.

§3.1. { ◦ $\mathrm{Vect}^1(B) \underset{\text{群同型}}{\cong} H^1(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ if B : CW複体とホモトピー同値.

$\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^1(B)$:= B上複素線束の同型類

- 同様にAbel群となる.

  ※自明化を調整しても, $|\mathcal{L}| = 1$ にはできるが ± 1 にはならない
  $\rightarrow$ $E \otimes E$ は自明とは限らない.

§3.1. { ◦ $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^1(B) \cong H^2(B; \mathbb{Z})$ if B : CW複体とホモトピー同値.

〈共役束〉

- $E \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^1(B)$ に対し $\overline{E} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^1(B)$: **共役束** を,
  (空間は $E = \overline{E}$, ファイバーにおける $\mathbb{C}$ 倍を共役におきかえる
  または
  ($g_{\alpha\beta}$ を共役におきかえる　によって定めると.

{ ◦ Eの逆元は $\overline{E}$: 共役束.

Associated Fiber Bundles.

☆ ベクトル束の"各ファイバー $\cong \mathbb{R}^n$" を一般の空間 F におきかえて
"各ファイバー $\cong F$" なるファイバー束の概念を得る.

Construction. $E \longrightarrow B$:（内積つき）ベクトル束

- sphere bundle $S(E) = \{|v| = 1\} \subseteq E \longrightarrow B$
- disk bundle $D(E) = \{|v| \le 1\} \subseteq E \longrightarrow B$

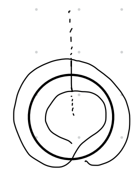
はファイバー束になる（自明化は isometry に選べるので）.

内積を考えなくても構成できる：

$$S(E) = (E \setminus \text{ゼロ切断}) / \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow B$$

$$D(E) = \underbrace{S(S(E))}_{\text{mapping cone}} = S(E) \times [0,1] / \sim, \quad (e,0) \sim (e',0) \Leftrightarrow p(e) = p(e')$$

- $E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ の disk bdle $\cong$ Möbius の帯, sphere bdle $\cong S_n$



Construction. $E \longrightarrow B$: n次元ベクトル束

(1) projective bundle $P(E) \longrightarrow B$

$P(E)_b = \{\ell \subseteq E_b : \text{原点を通る直線}\}$, $S(E)$の商として位相を入れる.

(2) flag bundle $F_k(E) \longrightarrow B$ $(k \le n)$

$F_k(E)_b = \{(\ell_1, \dots, \ell_k) \in P(E)_b^k \mid \ell_i \text{は直交}\}$, $P(E)$から位相を入れる.

(3) Stiefel bundle $V_k(E) \longrightarrow B$ $(k \le n)$

$V_k(E)_b = \{(v_1, \dots, v_k) \in S(E)_b^k \mid v_i \text{は o.n.}\}$, $S(E)$から位相を入れる.

$= \{\text{o.n. } k\text{-frame in } \mathbb{R}^n\}$: Stiefel mfd.

(4) Grassman bundle $G_k(E) \longrightarrow B$ $(k \le n)$

$G_k(E)_b = \{V \subseteq E_b : k\text{次元部分空間}\}$, $V_k(E)$の商として位相を入れる.

: Grassman mfd. $\quad G_1(E) = P(E)$